En busca de la calle

Luis F. Rodríguez

En verano del año pasado asistí a un congreso de astronomía en París, donde una noche salí a recorrer las calles alrededor del hotel. Después de caminar buen rato llegué a una intersección y, levantando la vista me enteré, por uno de los letreros azul metálico, que me encontraba en la calle Laplace (1749-1827, astrónomo, matemático, físico), añadía el letrero. Como en muchas otras ocasiones, no pude menos que reconocer lo balanceada que siempre me ha parecido la cultura francesa, en la que científicos y artistas, humanistas y políticos juegan papeles igualmente relevantes. Una medida de este balance es que existen calles dedicadas a todo tipo de personas que hicieron aportaciones en muy diversos campos.

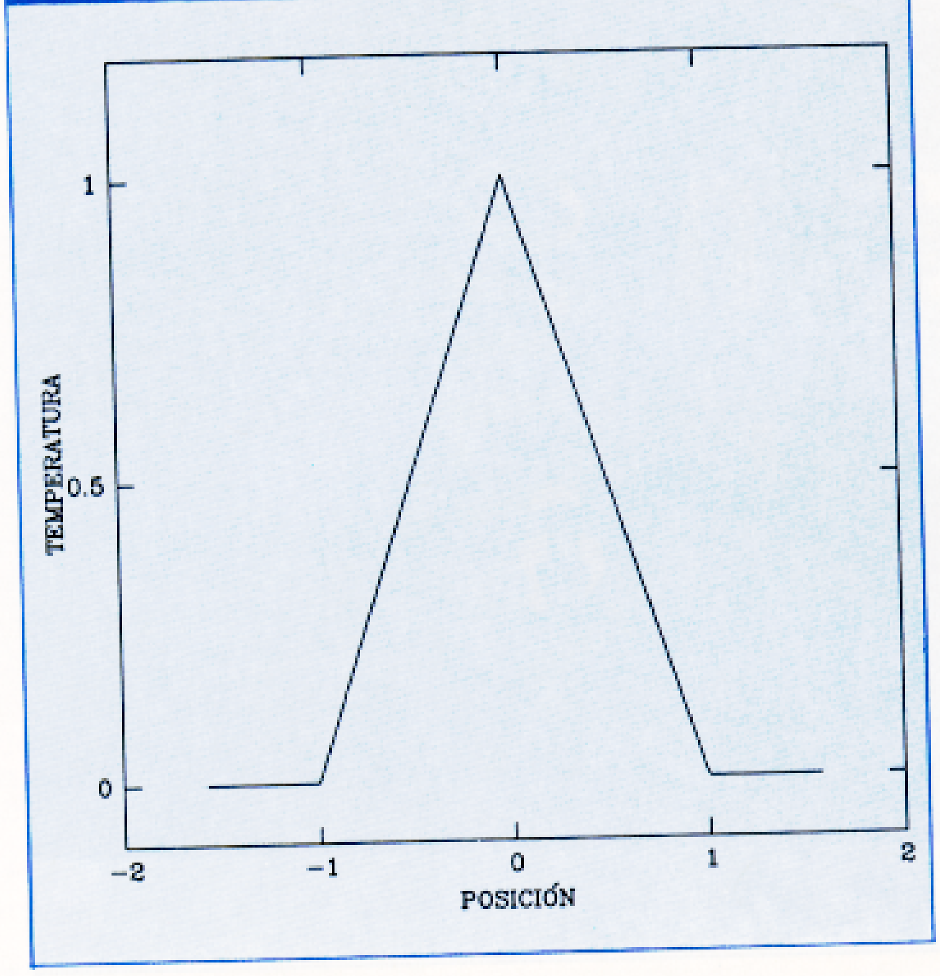
Continué caminando y después de cruzar una plazoleta llegué a otra calle que resultó estar dedicada a Descartes. Me encontraba en una zona de la ciudad en la cual muchas de las calles llevan nombre de ilustres científicos franceses. Entonces tuve la curiosidad de encontrar la calle dedicada a Jean Baptiste Joseph Fourier, el científico francés cuya obra es la que más influye en mi trabajo de investigación, digamos que es mi favorito científico francés. Apuré el paso y doblé en el siguiente cruce, confiado de que pronto encontraría la calle Fourier.

Fourier

Fourier nació en 1768 y fue el noveno hijo de una familia de modestos recursos. Su padre, quien era sastre, falleció cuando Fourier tenía sólo diez años de edad. Fourier estudió ingeniería en la Academia Militar y luego fue profesor de matemáticas de la misma. En 1798 formó parte de la expedición de 165 científicos que Napoleón llevó a Egipto. Su gran habilidad administrativa le ganó la simpatía de Napoleón, quien lo nombró prefecto de Isère en 1802. A pesar de sus pesadas responsabilidades administrativas, Fourier encontró tiempo para trabajar en su teoría de la conducción del calor. El calor era un tema que parecía obsesionarlo, quizá como consecuencia de los tres años que pasó en Egipto. Mantenía sus habitaciones exageradamente calientes, cubriéndose además con un abrigo.

El problema de la conducción del calor que preocupaba a Fourier puede ejemplificarse con el siguiente problema: Supongamos que tenemos una barra metálica cuya parte central ponemos a una cierta temperatura T, digamos que igual a un grado. Esta temperatura decae al ir hacia los bordes de la barra, volviéndose cero al llegar a un punto. Los extremos de la barra estarían en contacto con paredes infinitas que siempre mantendrían la temperatura a cero grados. La temperatura de la barra quedaría descrita por una función triángulo, como la que se muestra en la figura 1. Si dejamos que el calor fluya de las partes calientes (el centro de la barra) a las frías (los bordes), ¿cuál será la temperatura de cada punto de la barra como función del tiempo? Intuitivamente uno piensa que después de un tiempo suficientemente largo toda la barra quedará a 0 grados, una vez que haya cedido su calor a las paredes infinitas. Esta intuición es correcta, pero el chiste del problema es describir cómo ocurre este cambio en el tiempo.

FIGURA 1



Distribución de la temperatura (eje vertical) como función de la posición (eje orizontal) para la barra de nuestro problema. Los bordes de la barra están en contacto con paredes infinitas que se mantienen siempre a 0 grados.

Técnicamente hablando, éste y otros problemas de conducción del calor requieren de la solución de la ecuación de difusión, solución que en general no es fácil obtener.

Fourier tuvo la genial inspiración de representar la distribución inicial de la temperatura, en la barra, como suma de funciones seno y coseno. A esta serie de funciones la llamaremos serie de Fourier.

En la figura 2 mostramos cómo, añadiendo sólo cuatro términos a la serie, logramos una aproximación razonable de la función deseada, en nuestro ejemplo una función triángulo.

Dada la simetría de esta función respecto de 0, basta usar funciones coseno en la sumatoria. Si añadimos más y más términos, como hacemos en la figura 3, llegamos a tener una aproximación exacta de la función deseada.

Fourier sabía que los términos de la serie de menor longitud de onda (o lo que es lo mismo, de mayor frecuencia) se atenuarían más rápido en el tiempo, porque en ellos se alternaban temperaturas calientes y frías con poca separación espacial (muy juntitas), y por lo tanto alcanzarían el equilibrio más pronto. De este modo, sería posible describir la evolución temporal de la temperatura en cada punto de la barra en términos de una suma de funciones coseno que se irían

La calle

atenuando en el tiempo, de acuerdo a su longitud de onda, los de menor longitud de onda haciéndolo más rápidamnete.

En la figura 4 mostramos cómo cambiaría en el tiempo la temperatura de la barra. Claro, en realidad, la temperatura de la barra no está distribuida como cosenos, pero el modelo matemático funciona perfectamente.

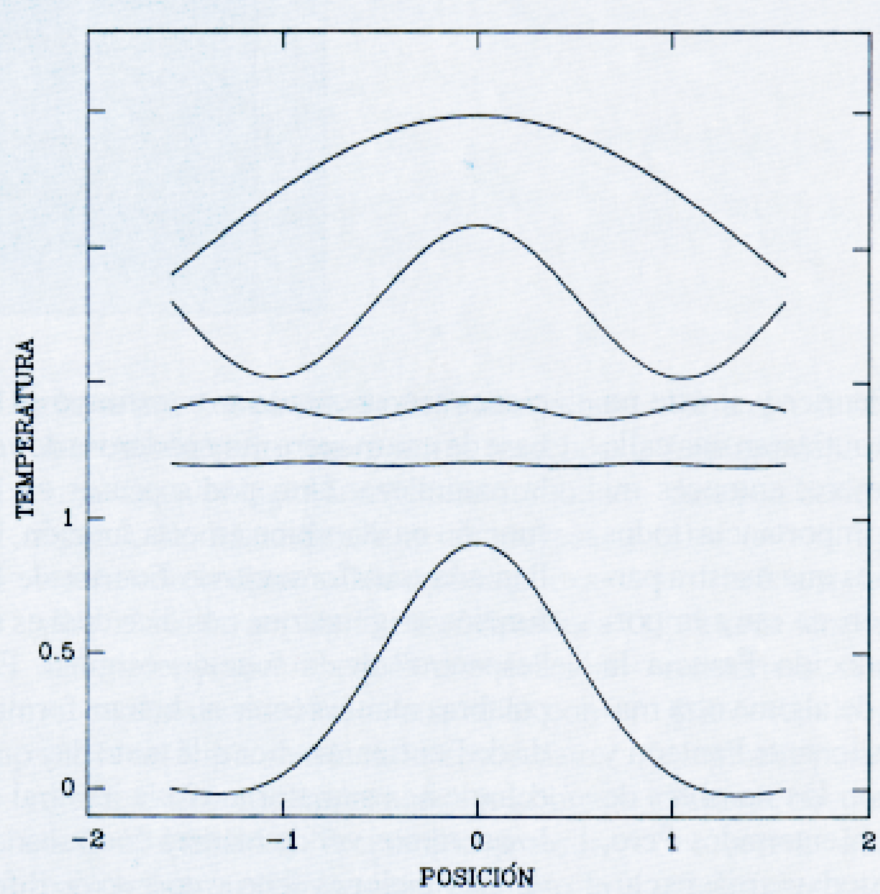
Regresé a mi hotel bastante tarde y algo decepcionado. En mi deambular había encontrado calles dedicadas a Pascal y a los esposos Curie, entre otros, pero no pude encontrar la calle Fourier. Concluí que mi búsqueda había sido desorganizada y, por lo tanto, con poca probabilidad de éxito. A la mañana siguiente compré una guía de las calles de París, que se veía completa y confiable. Busqué, y en la F aparecieron: Foucade, Fourcy, Fourneyron, pero para mi sorpresa Fourier no estaba en la guía.

Buscando la solución al problema de la conducción de calor, Fourier también había llegado a la conclusión de que era posible representar cualquier función, incluyendo una que cambiara abruptamente de un punto al siguiente, mediante una suma infinita de senos y cosenos. El 21 de diciembre de 1807 Fourier presentó esta idea ante la Academia Francesa, encontrando gran oposición en matemáticos tan eminentes como Laplace, Lagrange y Poison. ¿Cómo era posible que una suma de funciones de suave y ondulante comportamiento, como son los senos y cosenos, engendrara algo tan extraño como, por ejemplo, una función triángulo o una función escalón? En 1811 el Instituto de Francia escogió como tema para su premio de matemáticas la propagación del calor en los cuerpos sólidos. A pesar de la oposición a las ideas de Fourier, el premio fue concedido, pero con una cita mencionando falta de generalidad y rigor.

Su teoría de la conducción del calor sería publicada hasta 1822 en su libro *Teoría analítica del calor*. Tocaría a la posteridad demostrar que, contra la opinión de los grandes matemáticos de su tiempo, el ingeniero Fourier tenía razón.

En cierto modo, la no existencia de la calle Fourier se había convertido en una pequeña derrota personal. Si mi trabajo (la radioastronomía) dependía tanto de

FIGURA 2

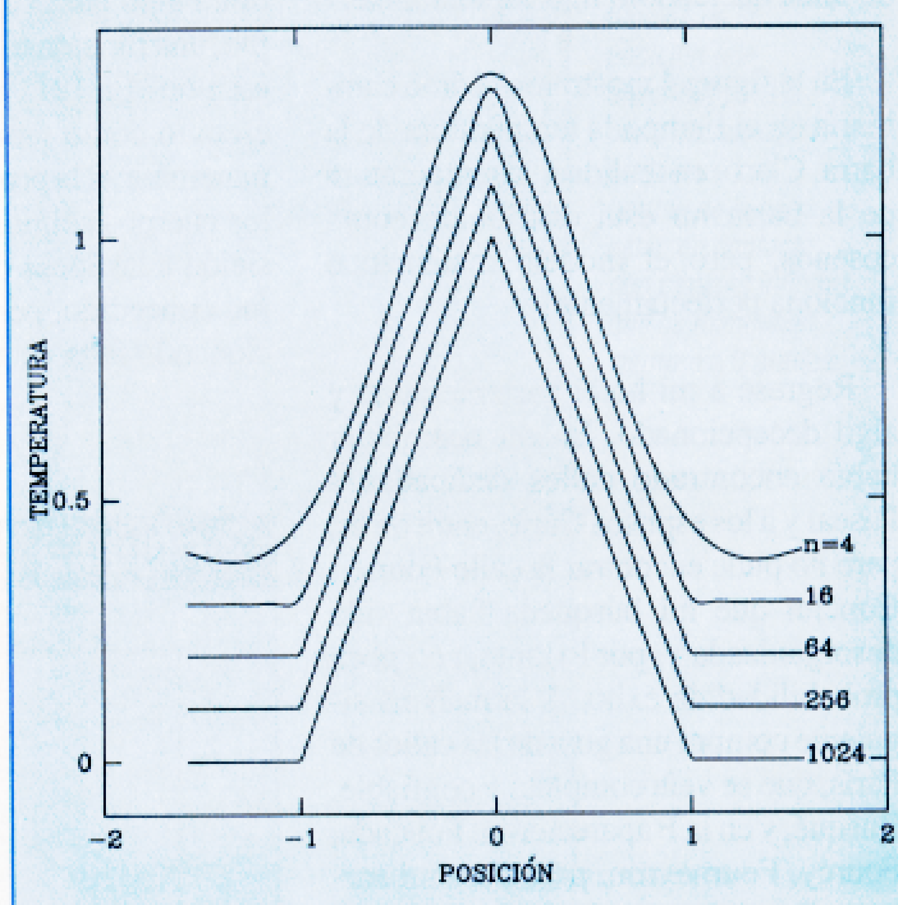


La suma de las cuatro funciones coseno en la parte superior de la figura da la función de la parte inferior de la misma, la cual es una aproximación razonable a la función triángulo de la figura 1.

Fourier

En esta figura mostramos cómo el añadir más términos a la sumatoria de cosenos (serie de Fourier) nos va acercando a la función triángulo. El número a la derecha de cada curva indica el número de términos incluidos en la sumatoria.

FIGURA 3



la contribución de Fourier y si éste no había merecido que bautizaran una calle de París con su nombre, entonces mi trabajo no tenía tanta importancia (todos los científicos creemos que nuestra particular especialización es muy importante). ¿Había reconocido Francia la grandeza de Fourier de alguna otra manera? Visité el impresionante Panteón y conseguí una guía con los nombres de los ilustres franceses ahí enterrados. Pero, claro, éste era un club todavía más exclusivo que el de las calles de París; ni siquiera Laplace estaba entre los personajes de la lista, mucho menos el pobre Fourier.

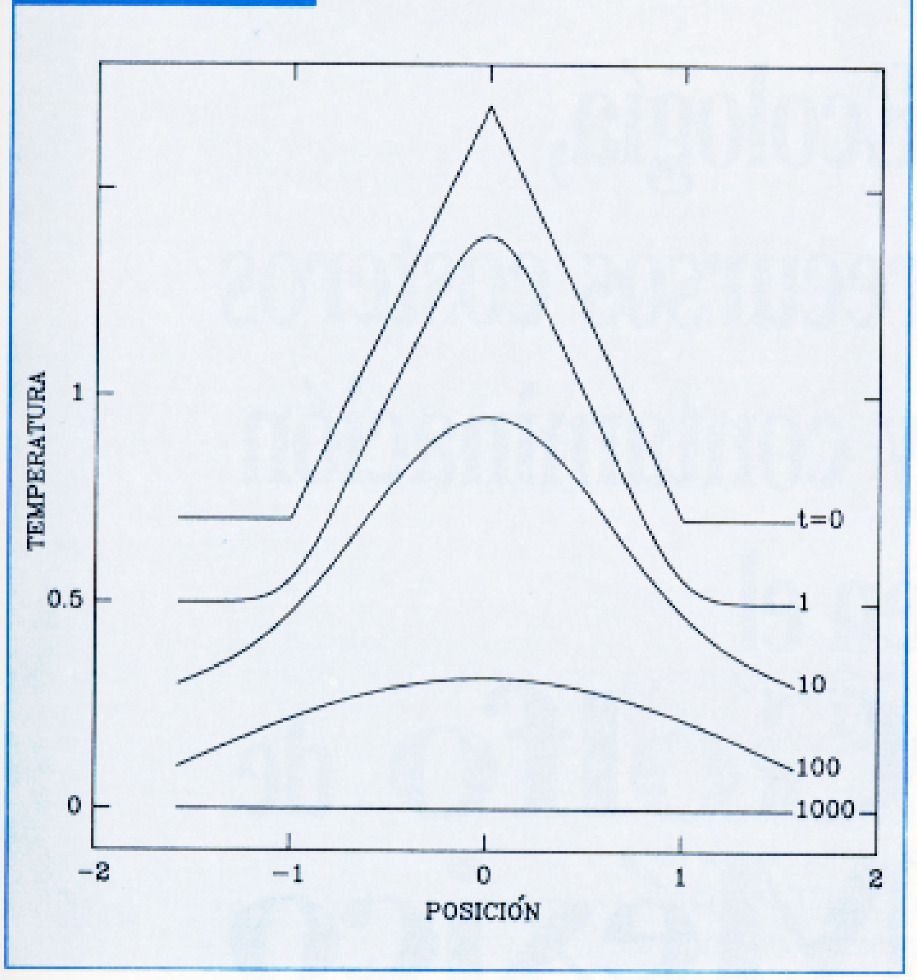
De regreso a la ciudad de México consulté la *Guía Roji* para ver si los mexicanos habíamos resultado más visionarios que los propios franceses, pero no, Laplace tiene también su calle y Fourier no.

Como ocurre a veces en la ciencia, la aparentemente simple idea de Fourier de que no era posible representar una función arbitraria como una suma de funciones seno y coseno se constituyó en la base de una manera muy poderosa de ver la naturaleza. Uno podía pensar en la función en sí, o bien en otra función, la llamada transformada de Fourier de la función original, que nos dice cuál es el "espectro" de la función original. En palabras menos técnicas, la transformada de Fourier nos dice qué tanto hay que echarle a la sumatoria (o a la integral si lo queremos ver de manera continuada) de las funciones seno y coseno de diferentes frecuencias para formar la función original. Intuitivamente esperamos que una función que cambia suavemente pueda expresarse con oscilaciones de baja frecuencia, mientras que una que cambia rápidamente va a requerir de oscilaciones de alta frecuencia. Las transformadas de Fourier de estas dos posibles funciones serían distintas. La primera tendría valores grandes sólo cerca de cero (bajas frecuencias), mientras que la segunda iba a extenderse hasta altas frecuencias.

En la radioastronomía la transformada de Fourier cobra particular importancia porque lo que los interferómetros miden no es la imagen de los cuerpos celestes, sino su transformada de Fourier. Para obtener la imagen del astro estudiado es necesario sacarle a los datos la antitransformada de Fourier, una operación simétrica a la de la transformada. El número de datos (que los radioastrónomos llamamos visibilidades) a los que hay que sacarles la antitransformada, puede ser de millones o aún más. Dos avances han hecho posible que la interferometría radioastronómica pueda realizarse en la práctica. Por un lado, las computadoras son cada vez más rápidas. Por el otro, en 1965 Cooley y Turkey publicaron una técnica para realizar transformadas (y, por supuesto, antitransformadas) de Fourier numéricamente y con muchas menos operaciones que las que requiere una transformada hecha ingenuamente. A esta transformación se le conoce como la transformada rápida de Fourier.

Si queremos transformar, por decir algo, n puntos, donde n es igual a 1 000, como la tranformada normal requiere de

FIGURA 4



Evolución temporal de la temperatura de la barra. El número a la derecha de cada curva indica el tiempo transcurrido en unidades arbitrarias.

n x *n* operaciones, necesitamos realizar 1 000 x 1 000 = un millón de operaciones. La transformada rápida hace uso de una propiedad matemática sorprendente: es posible obtener la transformada final a partir de dos transformadas separadas obtenidas a partir de los datos originales puestos en dos mitades. Así, si sacamos la transformada a dos grupos de 500 puntos, requerimos de 2 x 500 x 500 operaciones, o sea de sólo 500 000 operaciones y no del millón que requiere la transformada normal. Dividiendo los datos en mitades progresivamente se puede llegar a un algoritmo que, a primera aproximación, requiere del orden de *n* operaciones y ya no de *n* x *n* operaciones. Digamos que la transformada rápida de Fourier hace uso del refrán "divide y vencerás" repetidamente.

Armados de computadoras cada vez más rápidas y del algoritmo de la transformada rápida de Fourier, los científicos han convertido el análisis de Fourier en herramienta básica en muchas ramas de la ciencia y la tecnología. No sólo los radioastrónomos utilizamos cotidianamente la transformada de Fourier, sino que también lo hacen otros muchos científicos trabajando en áreas como la óptica, la cristalografía y el procesamiento de imágenes. No creo estar exagerando la importancia contemporánea de Fourier, pero una pequeña verificación no estaba de más. Hace unos días consulté, en el banco electrónico de datos donde están registrados todos los libros de la Universidad Nacional, cuántos libros había que llevasen en su título la palabra Fourier y cuántos Laplace. Pude encontrar 170 libros que incluían el nombre de Fourier, y sólo 55 llevaban el nombre Laplace.

Creo que las reflexiones anteriores permiten entender porqué Fourier no recibió en vida las mismas distinciones que, digamos, Laplace. Y no es que le haya ido mal a Fourier, quien llegó a ser secretario vitalicio de la Academia de Francia e inclusive recibió el título de barón, de manos de Napoleón, en 1908. Pero le fue mejor a Laplace, quien fue primero conde y después marqués, algo así como uno y dos escalones, respectivamente, arriba de Fourier. Además, Laplace tiene una calle en París nombrada en su honor y Fourier no.

En los siglos XVII y XIX era más importante tener soluciones analíticas que numéricas, era más importante lo elegante que lo práctico. Alguien como Laplace parecería un gigante ante Fourier, cuya contribución principal era un teorema que no parecía convincente a los matemáticos de su época. Pero las cosas cambian y en nuestro siglo XX el legado de Fourier es tan o más útil que el de Laplace. Si hoy bautizaran las calles de París, seguramente alguna recibiría el nombre de Fourier. Pero el reparto se hizo hace mucho tiempo y entonces la importancia de su contribución a la ciencia no era tan evidente como es hoy. ●

Luis F. Rodríguez
Instituto de Astronomía, UNAM