Taller de Ciencia
"El Sistema GPS y la Relatividad General"

Introducción

El Sistema GPS (Global Positioning System) permite determinar nuestra posición en longitud, latitud, y altitud en cualquier sitio de la Tierra con una precisión absoluta de unas decenas de metros. El Sistema está compuesto de 24 satélites en órbita circular alrededor de la Tierra, con período orbital de 12 horas (lo cual implica que están a una altitud de 20,200 km). Cada satélite tiene un reloj atómico y emite una señal con su "hora" en la banda de radio.

Un detector GPS típico es del tamaño de un control de televisión y capta simultáneamente a alrededor de seis satélites.

Para entender cómo funciona el posicionamiento vamos a hacer la suposición de que los relojes que van en cada satélite están sincronizados entre sí y que el detector en la Tierra tambien tiene un reloj que está sincronizado con los demás (ésto no es exacto, en realidad el detector obtiene el tiempo combinando la señal de varios, al menos cuatro, satélites). Además haremos la suposición de que la señal viaja de los satélites al detector exactamente a la velocidad de la luz, c = 299,793 km/s (ésto sería cierto si estuviéramos en el vacío, donde las ondas electromagnéticas viajan exactamente a c, pero ésto no es totalmente cierto en la atmósfera de la Tierra).

Es posible entonces obtener nuestra posición con la señal de tres satélites (aunque mientras más captemos mejor), en base a lo siguiente. El detector va a recibir la señal de los satélites 1, 2, y 3 con retrasos Δt_1, Δt_2, y Δt_3, causados por el tiempo que tarda la señal en viajar del satélite al receptor. Cómo se conoce exactamente la posición de los satélites (cada satélite "sabe" su posición), el retraso Δt_1 medido implica que estamos en algún punto de la "superficie" de una esfera centrada en el satélite 1, que tiene radio $c\Delta t_1$ (recuerden que distancia = velocidad por tiempo). Esto no restringe mucho nuestra posición. Ahora bien, el retraso Δt_2 medido implica que tambien estamos en la "superficie" de otra esfera, ésta centrada en el satélite 2 y con radio $c\Delta t_2$. La intersección de estas dos superficies esféricas es un círculo. Finalmente, el retraso Δt_3 implica que tambien estamos en la "superficie" de una tercera esfera, ésta centrada en el satélite 3 y con radio $c\Delta t_3$. La intersección de las tres superficies esféricas es dos puntos, de los cuales normalmente se puede descartar uno (por ejemplo, porque queda ubicado debajo de la superficie de la Tierra o en el espacio). El punto que queda es nuestra posición.

Midiendo posiciones relativas

Habíamos dicho que las posiciones absolutas que mide un detector GPS tienen un error del orden de decenas de metros. Sin embargo, si medimos de manera simultánea dos posiciones cercanas (con dos detectores GPS), el error en la separación de las dos posiciones (llamado el error relativo) es mucho menor. Esto es así porque muchos de los factores que contribuyen al error absoluto (como el que la atmósfera o la ionosfera están cambiando con el tiempo y que ellas afectan la velocidad de la radiación) se cancelan al hacer una medición relativa. Si se cuenta con dos detectores GPS, se les puede poner juntos y estimar el error entre las posiciones que miden. Algunos detectores dan una estimación del error absoluto y se puede ver que el error relativo es mucho menor.

Usando dos puntos separados por una distancia conocida (por ejemplo, medida con una cuerda), hacemos medidas simultáneas de la longitud, latitud, y altitud de los dos puntos. Lo mejor es hacer ésto con dos detectores GPS. Si sólo se cuenta con un detector, se puede hacer una medida en el punto A, luego una medida en el punto B, y finalmente otra medida en el punto A. Hay que hacer ésto lo mas rápido posible. Se promedian las dos medidas tomadas en A y se comparan con la única medida tomada en B.

Apunte abajo la longitud, latitud, y altitud de los dos puntos:

POSICION PARA DOS PUNTOS

Punto	Longitud	Latitud	Altitud
A			
B			

Utilizando trigonometría y el que el radio de la Tierra (para una altitud de 0 metros) es de 6,400 km, calcule la separación entre los dos puntos. ¿Qué tanto discrepa el valor medido de esta manera con la separación medida con la cuerda? ¿Porqué este error en la medida relativa es menor que el error del orden de decenas de metros que se espera en una medida absoluta?

Nótese que aún un error de 50 metros requiere de una medición de los retrasos con precisión del orden de (50/300,000,000) segundos, o sea de 0.00000017 segundos (1.7×10^{-7} segundos).

Se espera que si se hacen bien las cosas y no hay problemas inesperados, uno pueda medir la separación entre dos puntos con una precisión del orden de un metro, lo cuál implica que para ésto necesitamos medir los retrasos con una precisión de (1/300,000,000) segundos, o sea de 0.0000000033 segundos (3.3×10^{-9} segundos).

¿Necesitamos Correcciones por la Relatividad General?

Hasta ahora hemos supuesto que el tiempo transcurre igual en la superficie de la Tierra que en los satélites. La mecánica Newtoniana estaría de acuerdo con ésto. Sin embargo, a principios del siglo XX, Einstein desarrolló la teoría de la Relatividad que implica que el tiempo transcurre de manera distinta, de acuerdo al movimiento de los observadores y a su posición respecto a un campo de gravedad. En el caso del sistema GPS tanto el que los satélites se estén moviendo, como el que están a un mayor radio que la superficie de la Tierra, son efectos de Relatividad General que tienen que tomarse en cuenta para hacer mediciones precisas de nuestra posición. Por simplicidad, vamos a discutir sólo el efecto debido a que la superficie de la Tierra y los satélites están en campos gravitacionales de distinta intensidad.

A un radio r del centro de la Tierra, el tiempo t transcurre con respecto a un punto muy lejos (digamos en infinito, ∞), de acuerdo a:

$$\Delta t_r = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2} \Delta t_\infty.$$

En esta ecuación, G es la constante gravitacional, $G = 6.67 \times 10^{-8}$ dinas cm^2 gm^{-2} y M es la masa de la Tierra, $M = 6.0 \times 10^{27}$ gramos.

Con ésto, demuestre que el tiempo en la superficie de la Tierra, Δt_T, transcurre más lentamente que el tiempo en los satélites, Δt_S, por

$$\Delta t_T = (1 - 5 \times 10^{-10}) \Delta t_S.$$

En otras palabras, hay en error del orden de 5×10^{-10} si no hacemos la corrección relativista. Por ejemplo, si nuestra medición toma 20 segundos, un error del orden de 5×10^{-10} introducirá errores en el tiempo del orden de 10^{-8} segundos, que se traducen en errores en la posición del orden de 3 metros, mayores que la precisión deseada.

En conclusión, sí es necesario tomar en cuenta estas correcciones de la Relatividad General (de hecho, el software que tiene el detector GPS toma en cuenta estos efectos).

Este ejercicio está basado en el Proyecto A del libro "Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity", de Taylor y Wheeler (Addison-Wesley-Longman; 2000).

Pregunta Adicional

Una estrella de neutrones tiene $M = 2.8 \times 10^{33}$ gramos y un radio $r = 10$ km. ¿Qué tan lento transcurre el tiempo en su superficie con respecto a un observador en infinito? En el radio de Schwarzschild de un hoyo negro se cumple

$$r = \frac{2GM}{c^2}.$$

¿Qué tan lento transcurre el tiempo en el radio de Schwarzschild con respecto a un observador en infinito?

Información Adicional

Los satélites del sistema GPS transmiten su señal en la frecuencia de 1.6 GHz.

Páginas Recomendadas

http://www.aero.org/publications/GPSPRIMER/
http://www.colorado.Edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html
http://www.trimble.com/gps/

Luis F. Rodríguez