

# Restauración de Imágenes por el Método de Máxima Entropía

Luis F. Rodríguez

*Instituto de Astronomía, UNAM, y El Colegio Nacional*

## 1. Introducción al Método

Comenzaremos utilizando un ejemplo elemental para dar una idea de cual es el método de máxima entropía. Supongamos que tenemos tres casilleros cerrados en los que sabemos que hay distribuidas un total de nueve pelotas. Si no tenemos más información que ésta, ¿cuál sería la manera mas probable en que estén distribuidas las nueve pelotas? La distribución más probable será aquella que tenga la máxima entropía. De acuerdo a conceptos de mecánica estadística o de teoría de la información la entropía está dada por (Shannon 1948):

$$S = - \sum_j n_j \ln(n_j), \quad (1)$$

donde  $n_j$  es el número de pelotas en el casillero  $j$ . Es fácil encontrar que la distribución que maximiza la entropía en este caso es la de (3,3,3), o sea la de tener tres pelotas por casillero. En la Figura 1 mostramos tres posibles distribuciones, incluyendo la de (3,3,3), y sus respectivas entropías.

El caso anterior es trivial y *el llamado método de máxima entropía es el que viene de pedir que la distribución tenga máxima entropía pero además que cumpla con una restricción o restricciones adicionales* (Jaynes 1957; Ables 1974). Continuando con nuestro sencillo ejemplo, digamos que pedimos que la distribución, además de ser la de máxima entropía, cumpla con la restricción de que el número de pelotas en el segundo casillero sea igual a la suma del número de pelotas en los dos casilleros restantes más uno. En la Figura 2 mostramos tres posibles distribuciones que cumplen esta restricción y sus respectivas entropías. Al tanteo se puede encontrar que la distribución de máxima entropía entre las posibles es la de (2,5,2). Dentro de las condiciones del problema, esta distribución es la más probable.

## 2. Reconstrucción de Imágenes

Uno de los problemas fundamentales de la astronomía observacional es determinar  $I(x, y)$ , la intensidad verdadera de una fuente en el plano del cielo. Cada punto en el plano

DISTRIBUCION	ENTROPIA			
<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	3	3	3	-9.9
3	3	3		
<table border="1"><tr><td>1</td><td>5</td><td>3</td></tr></table>	1	5	3	-11.3
1	5	3		
<table border="1"><tr><td>0</td><td>1</td><td>8</td></tr></table>	0	1	8	-16.6
0	1	8		

Fig. 1.— Tres posibles distribuciones de nueve pelotas en tres casilleros (izquierda) y sus respectivas entropías (derecha). De todas las posibles distribuciones es la de tres pelotas por casillero la que tiene la máxima entropía.

DISTRIBUCION	ENTROPIA			
<table border="1"><tr><td>2</td><td>5</td><td>2</td></tr></table>	2	5	2	-10.8
2	5	2		
<table border="1"><tr><td>1</td><td>5</td><td>3</td></tr></table>	1	5	3	-11.3
1	5	3		
<table border="1"><tr><td>4</td><td>5</td><td>0</td></tr></table>	4	5	0	-13.6
4	5	0		

Fig. 2.— Tres posibles distribuciones de nueve pelotas en tres casilleros (izquierda) y sus respectivas entropías (derecha). Estas distribuciones tienen la restricción adicional de que el número de pelotas en el segundo casillero sea igual a la suma del número de pelotas en los dos casilleros restantes más uno. De todas las posibles distribuciones es la de (2,5,2) la que tiene la máxima entropía.

del cielo queda ubicado por sus coordenadas  $x, y$ . Desafortunadamente, cuando uno obtiene una imagen de la fuente de interés, no es  $I(x, y)$  lo que se mide, sino una convolución de  $I(x, y)$  con la respuesta del instrumento a una fuente puntual,  $P(x, y)$ . La imagen medida,  $D(x, y)$ , será entonces

$$D(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x - x', y - y') I(x', y') dx' dy', \quad (2)$$

donde hemos ignorado que cualquier proceso de medición introduce además ruido en la imagen medida. A la respuesta del instrumento a una fuente puntual,  $P(x, y)$ , se le denomina de varias maneras, entre ellas haz sintetizado o función del punto dispersado (“point spread function”).

A primera vista, parecería que la recuperación de  $I(x, y)$  sería posible tomando en cuenta conceptos de transformada de Fourier. Supongamos que  $\tilde{I}(u, v)$ ,  $\tilde{P}(u, v)$ , y  $\tilde{D}(u, v)$  son las transformadas de Fourier de  $I(x, y)$ ,  $P(x, y)$ , y  $D(x, y)$ , o sea que, por ejemplo

$$\tilde{I}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy, \quad (3)$$

donde  $u, v$  son las frecuencias espaciales de las transformadas. Entonces usando el teorema de la convolución (que nos dice que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es igual a la multiplicación de las transformadas de Fourier de las dos funciones), tenemos que

$$\tilde{D}(u, v) = \tilde{P}(u, v) \tilde{I}(u, v), \quad (4)$$

de donde

$$\tilde{I}(u, v) = \frac{\tilde{D}(u, v)}{\tilde{P}(u, v)}. \quad (5)$$

De esta ecuación, parecería que podemos recuperar  $I(x, y)$  dividiendo  $\tilde{D}(u, v)$  sobre  $\tilde{P}(u, v)$  para obtener  $\tilde{I}(u, v)$  y sacando la antitransformada de Fourier de esta última función. Sin embargo, ésto en general no es posible porque dada la resolución angular finita de cualquier instrumento,  $\tilde{P}(u, v)$  se tiene que hacer 0 para frecuencias espaciales lo suficientemente grandes y la división divergiría para esas grandes frecuencias espaciales.

### 3. El caso de la interferometría de radio

En esta sección seguimos la discusión de Nityananda & Narayan (1982) y Narayan & Nityananda (1986).

De hecho, en el caso de la interferometría de radio (en el cual nos concentramos de ahora en adelante) se tiene la situación de que  $\tilde{P}(u, v) = 1$  para los puntos en el plano  $(u, v)$  para los que se tiene una medición, mientras que  $\tilde{P}(u, v) = 0$  para los puntos en el plano  $(u, v)$  para los que no se tiene una medición. En términos matemáticos pondríamos que

$$\tilde{P}(u, v) = 1; \quad (u, v) \in K, \quad (6)$$

$$\tilde{P}(u, v) = 0; \quad (u, v) \in U, \quad (7)$$

donde  $K$  representa los puntos del plano  $(u, v)$  que son “conocidos” (la  $K$  viene del inglés “known”), mientras que  $U$  representa los puntos del plano  $(u, v)$  que son “desconocidos” (la  $U$  viene del inglés “unknown”).

Entonces, para recuperar algo que sea lo mas cercano a  $I(x, y)$  tendríamos que tener algún método que nos permitiera obtener un estimado de  $\tilde{I}(u, v)$  para las regiones del plano  $(u, v)$  para las que no hay mediciones, mediante algún tipo de interpolación o de extrapolación. Como veremos más adelante, utilizaremos el método de máxima entropía para lograr ésto.

Por de pronto, pondremos como restricción que cualquiera que sea la solución que encontremos para  $I(x, y)$ , su transformada de Fourier en aquellos puntos  $(u, v)$  para los cuales hay una medición debería de ser igual a  $\tilde{D}$ , lo cual puesto en términos matemáticos sería

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy = \tilde{D}(u, v); \quad (u, v) \in K. \quad (8)$$

Esta es una restricción muy razonable porque de hecho es lo único que sabemos con certeza. Esta será la restricción que requiere el método de máxima entropía.

Por otro lado, por analogía con la ecuación (1) definimos la entropía de la imagen como

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -I(x, y) \ln[I(x, y)] dx dy. \quad (9)$$

La ecuación (9) inmediatamente implica que la imagen final tendrá que ser positiva, puesto que no existe el logaritmo natural de un número negativo. Entonces, escogeríamos como imagen aquella que cumpla la ecuación (8) y además cuya entropía, definida de acuerdo a la ecuación (9), sea máxima.

#### 4. Algoritmos

A través del tiempo se han propuesto diversos algoritmos que busquen la  $I(x, y)$  que satisfaga simultáneamente las ecuaciones (8) y (9) (e. g. Gull & Daniell 1978). Generalmente, se utiliza el método de multiplicadores de Lagrange para satisfacer simultáneamente las dos ecuaciones. Recordemos que este método sirve precisamente para buscar el máximo (o mínimo) de una función (en este caso la entropía de la imagen) que está adicionalmente sujeta a una restricción (que la transformada de Fourier de  $I(x, y)$  en los puntos para los que hay información se ajuste a los valores medidos). Por ejemplo, un problema sencillo que se resuelve con el método de multiplicadores de Lagrange es el de determinar cual es el cociente de radio a altura en un cilindro tal que se maximice su volumen (función a maximizar) para un área fija (la restricción).

En la interferometría de radio uno de los algoritmos más utilizados es el de Cornwell & Evans (1985), el cual se encuentra implementado en la tarea VTESS del paquete AIPS (Astronomical Image Processing System). Los pasos básicos en la utilización de este algoritmo son los siguientes. Se miden el ruido rms de la imagen, así como el flujo total de la fuente. Se proporciona esta información al algoritmo. Se inicia el proceso iterativo con un mapa “plano”, o sea en el que la intensidad es la misma en todos los puntos. Finalmente, con métodos similares al de Newton-Raphson se varían los valores de la intensidad en cada pixel hasta satisfacer, dentro del ruido, las ecuaciones (8) y (9).

#### 5. Un ejemplo

Para concluir, utilizamos la tarea VTESS del paquete AIPS para reconstruir la imagen de la fuente 0403+260, un cuasar brillante. Las observaciones fueron hechas a 15 GHz el 19 de enero del 2001 en la configuración A del Very Large Array. Los datos fueron primero autocalibrados en fase y amplitud y posteriormente se hicieron tres imágenes: 1) el mapa “sucio”, 2) el mapa “limpio”, y 3) la imagen reconstruida con el método de máxima entropía (MEM). En la Figura 3 mostramos cortes a estas imágenes a lo largo de la declinación (en la dirección norte-sur), así como cortes (a lo largo de la coordenada  $u$  en el plano de Fourier)

a la parte real de sus respectivas transformadas de Fourier.

En esta figura podemos ver como la cobertura del plano de Fourier en el caso del mapa sucio es incompleta. También más allá de aproximadamente 2 millones de longitudes de onda no hay información. Hay que hacer notar que las oscilaciones que muestra la transformada son resultado de que por tratarse de datos reales, hay ruido en ellos, y de que aparecen pequeñas inestabilidades numéricas al transformar el mapa sucio. Por supuesto, el mapa sucio muestra los lóbulos secundarios que resultan del cubrimiento incompleto del plano  $(u, v)$ .

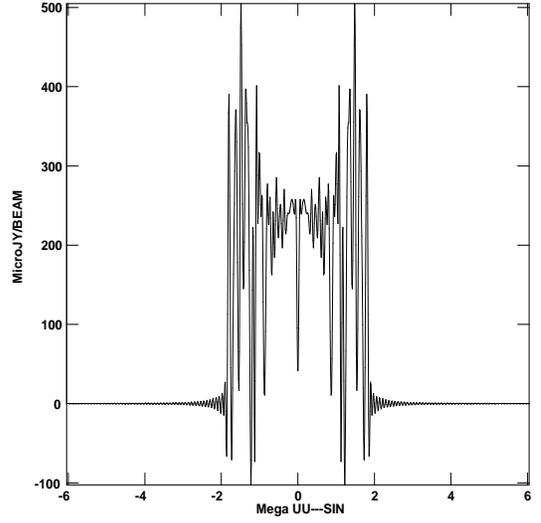
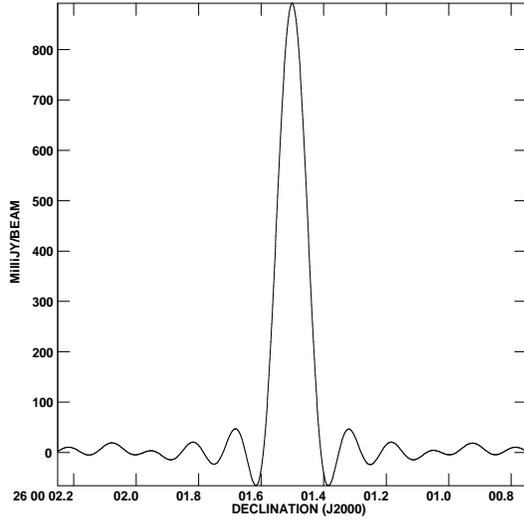
Cuando consideramos el mapa limpio, vemos que en el plano de Fourier el proceso equivale a hacer una interpolación a los datos  $(u, v)$ , reemplazando el errático comportamiento de los datos reales por una Gaussiana más o menos suave. En el plano de la imagen, esto elimina los lóbulos secundarios. Sin embargo, la resolución angular del mapa sucio y del mapa limpio son comparables.

Finalmente, en el caso del método de máxima entropía, vemos en el plano de Fourier que no sólo se ha hecho una interpolación dentro de las líneas de base de menos de 2 millones de longitudes de onda, sino que también se ha hecho una extrapolación más allá de ellas. Esto hace que la imagen no sólo ya no tenga lóbulos secundarios sino que tenga mejor resolución angular, como por un factor de dos, respecto a la imagen sucia o la imagen limpia. Es esta característica de superresolución la que ha provocado discusión sobre lo justificado de usar este método. Si bien el método no es muy popular en la radioastronomía, se utiliza bastante en otras longitudes de onda.

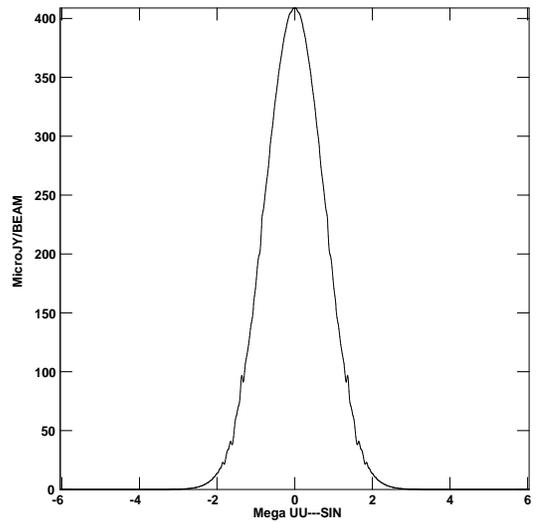
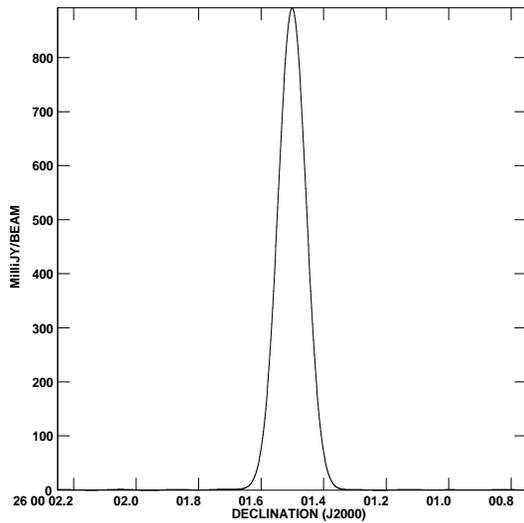
Este montaje de cortes ejemplifica las características principales de los tres tipos de imágenes.

# IMAGEN

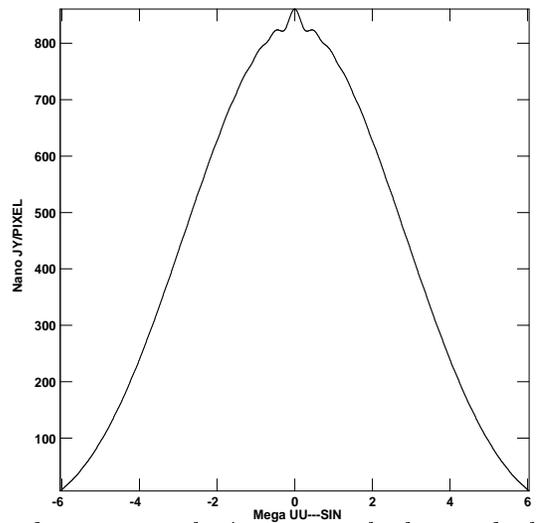
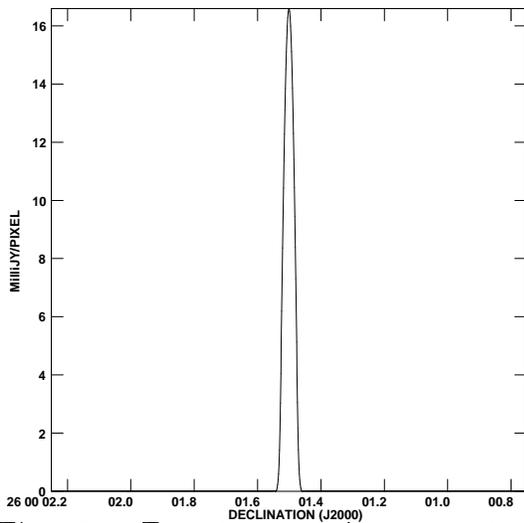
# TRANSFORMADA



S  
U  
C  
C  
I  
O



L  
I  
M  
P  
I  
O



M  
E  
M

Fig. 3.— En este montaje se muestran a la izquierda cortes a la imagen a lo largo de la declinación (IMAGEN), mientras que a la derecha se muestran cortes a sus respectivas transformadas de Fourier a lo largo de la coordenada  $u$  (TRANSFORMADA), correspondiendo a un mapa sucio, uno limpio, y uno reconstruido con máxima entropía (MEM).

## 6. Referencias

- Ables, J. G. 1974, *Astronomy and Astrophysics Supplement*, 15, 383
- Cornwell, T. J. & Evans, K. J. 1985, *Astronomy & Astrophysics*, 143, 77
- Gull, S. F. & Daniell, G. J. 1978, *Nature*, 272, 686
- Jaynes, E. T. 1957, *Physical Review*, 106, 620
- Narayan, R. & Nityananda, R. 1986, *Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics*, 24, 127
- Nityananda, R. & Narayan, R. 1982, *Journal of Astrophysics and Astronomy*, 3, 419
- Shannon, C. E. 1948, *Bell System Technical Journal*, 27, 379