Problemas de Procesos Radiativos 3
Entregar el martes 20 de abril del 2004

1. (Este problema se incluyó en la Olimpíada Internacional de Física de 1998, para jóvenes de Preparatoria. Por esto a veces la terminología está muy explícita). Vale 4 puntos.

En este problema analizamos e interpretamos mediciones hechas en 1994 de la emisión de ondas de radio de una fuente dentro de nuestra galaxia.

El receptor estaba sintonizado para recibir una banda ancha de ondas de radio con longitud de onda de varios centímetros. La Figura 1 muestra una serie de imágenes registradas en diferentes épocas. Los contornos indican intensidad de radiación igual, de similar manera que los contornos de altitud de un mapa geográfico. En la Figura 1 los dos máximos se interpretan como mostrando dos objetos alejándose de un centro común que se indica con la cruz en las imágenes (el centro, el cual se supone fijo en el espacio, emite fuertemente ondas de radiación pero principalmente a otras longitudes de onda). Las mediciones hechas en las fechas mostradas fueron realizadas a la misma hora del día.

La escala de la Figura 1 está dada por un segmento de línea que muestra un segundo de arco (1 sa = 1/3600 de un grado). La distancia al cuerpo celeste en el centro de la Figura 1, indicado con cruces, se estima es $R =$ 12.5 kpc. Un kiloparsec (kpc) es igual a 3.09×10^{19} m. La velocidad de la luz es $c = 3.00\times10^{8}$ m/s. No se requiere que se hagan cálculos de error en la solución.

a) Denotamos la posición angular de los dos emisores de radio eyectados, relativos al centro común, por $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, donde los subíndices 1 y 2 se refieren a los objetos de la izquierda y la derecha, respectivamente, y t es el tiempo de observación. Las velocidades angulares, vistas desde la Tierra, son ω_1 y ω_2. Las velocidades lineales transversas aparentes (ésto es, en el plano del cielo) son $v'_{1,\perp}$ y $v'_{2,\perp}$. Usando la Figura 1, haga una gráfica para encontrar los valores numéricos de ω_1 y ω_2 en milisegundos de arco por día (msa/d). Tambien determine los valores numéricos de $v'_{1,\perp}$ y $v'_{2,\perp}$, y escriba los resultados. (Usted puede quedar intrigado con algunos de los resultados).

b) Para resolver el acertijo que aparece en la parte (a), considere una fuente de luz moviéndose con velocidad $\vec{v}$ a un ángulo ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) en la dirección hacia un observador distante colocado en O (ver Figura 2). La velocidad puede escribirse como $v = \beta c$, donde c es la velocidad de la luz. La distancia a la fuente, medida por el observador, es R. La velocidad angular de la fuente, como es vista por el observador, es ω, y la velocidad lineal transversa aparente (en el plano del cielo) es $v'_\perp$. Encuentre ω y $v'_\perp$

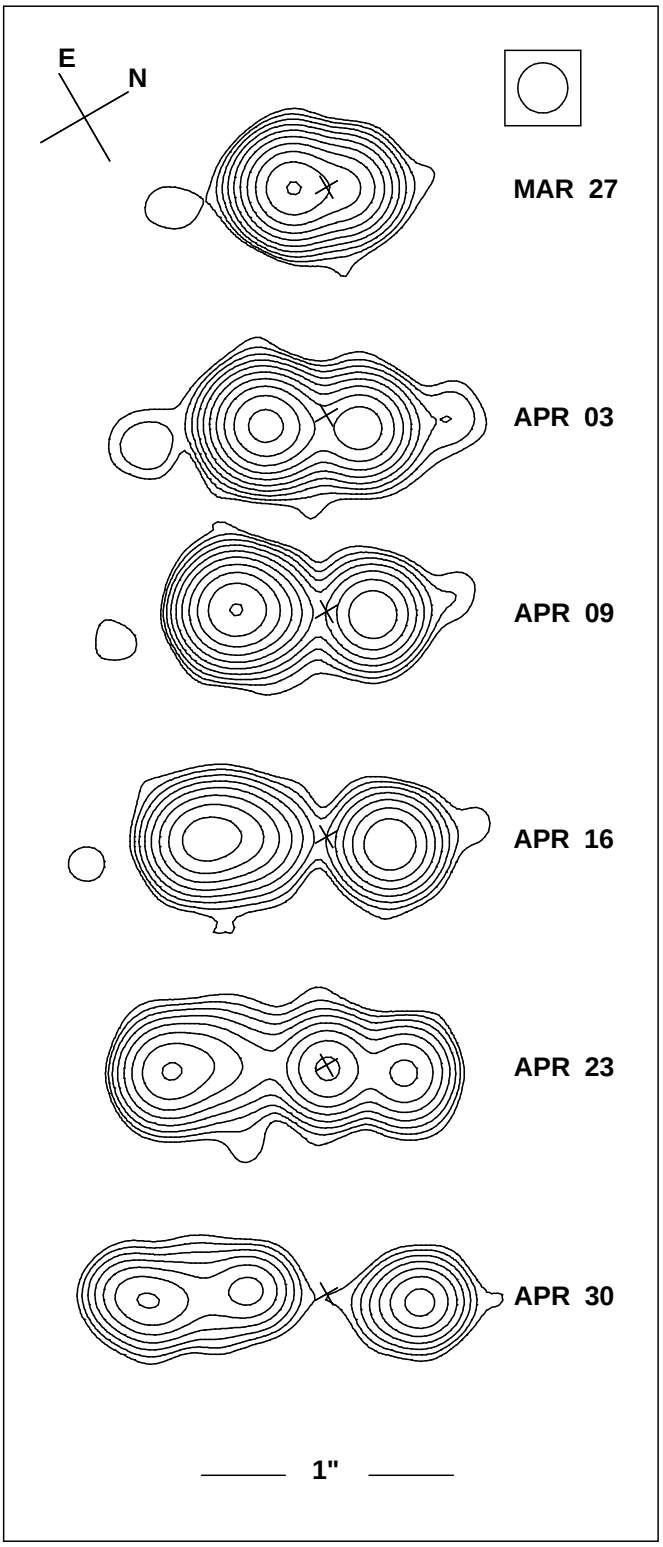

Figure 1: Emisión de radio de una fuente en nuestra galaxia.

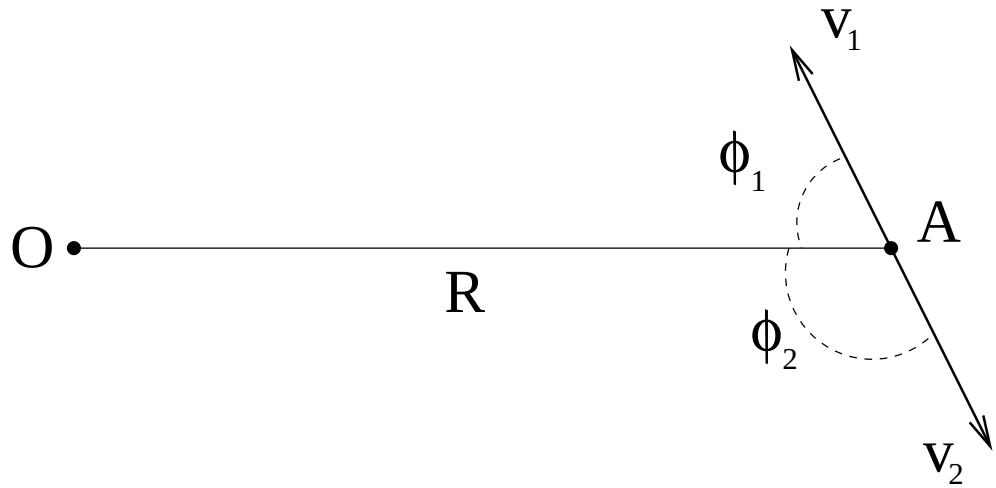

Figure 2: Si los dos objetos tienen la misma rapidez, pero velocidades opuestas entonces $v_1 = v_2 = v$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, y $\phi_2 = \pi - \phi_1$.

en términos de β, R, y ϕ y escriba sus respuestas.

c) Suponemos que los dos objetos eyectados, descritos en la introducción y en la parte (a), se mueven en direcciones opuestas con igual velocidad $v = \beta c$. Entonces los resultados de la parte (b) hacen posible calcular β y ϕ de las velocidades angulares ω_1 y ω_2 y la distancia R. Acá ϕ es el ángulo definido en la parte (b), para el objeto en el lado izquierdo de la Figura 1, correspondiendo al subíndice 1 en la parte (a). Derive fórmulas para β y ϕ en términos de las cantidades conocidas y determine sus valores numéricos de los datos en la parte (a). Escriba sus respuestas.

d) En la situación de un solo cuerpo de la parte (b), encuentre la condición para que la velocidad aparente en el plano del cielo $v'_\perp$ sea mas grande que la velocidad de la luz c. Escriba la condición en la forma $\beta > f(\phi)$ y encuentre una expresión analítica para la función f. Grafique la región físicamente relevante en el plano (β, ϕ). Sombree la parte donde la condición $v'_\perp > c$ se cumple.

e) Estando aún en la situación de un solo cuerpo de la parte (b), encuentre una expresión para el valor máximo $(v'_\perp)_{max}$ de la velocidad aparente en el plano del cielo para una β dada. Note que esta velocidad aumenta sin límite cuando $\beta \to 1$.

f) El estimado para R dado en la introducción no es del todo confiable. Los científicos han comenzado a especular en un método mejor y mas directo para determinar R. Una idea es como sigue. Suponga que podemos identi-

ficar y medidar las longitudes de onda λ_1 y λ_2 corridas por el efecto Doppler de una longitud de onda que originalmente es λ_0 en el marco de referencia de cada uno de los objetos. Comenzando por las ecuaciones del corrimiento Doppler relativista, $\lambda = \lambda_0(1-\beta\, cos\phi)(1-\beta^2)^{-1/2}$, y suponiendo como antes que ambos objetos tienen la misma velocidad v, muestre que la incógnita $\beta = v/c$ puede ser expresada en términos de λ_0, λ_1, y λ_2 como

$$\beta = \left(1 - \frac{\alpha\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}\right)^{1/2}.$$

Escriba el valor numérico del coeficiente α. Usted notará que las mediciones sugeridas de las longitudes de onda darán en la práctica un nuevo estimado de la distancia.

2) (Vale dos puntos) a) Suponga que las fuentes en movimiento del problema anterior tienen la misma emisión y que esta emisión es isotrópica en el marco de referencia de las fuentes. Desde el punto de vista del observador, ¿cuál es el cociente de intensidad entre las dos fuentes? Use la ecuación (4.97b) del R & L. b) Si el ángulo entre la línea de visión y la fuente que se acerca es de $1°$ y la velocidad de la fuente es $\beta = 0.99$, ¿cuánto vale este cociente? ¿En este caso, será fácil detectar en la misma imagen a la fuente que se acerca y a la que se aleja?

3) (Vale dos puntos) Entre otras partículas, los rayos cósmicos contienen protones. Un protón que viaja a velocidades relativistas "ve" la radiación de fondo que está enfrente de su trayectoria como un cuerpo negro mucho más caliente que 2.7 K (ver problema 4.13 del R & L). Esto fotones, que aparecen como muy energéticos para el protón, pueden colisionar con él y hacerle perder energía (debido a la producción de piones), de modo que un rayo cósmico ultraenergético no puede viajar mucho por el espacio sin perder rápidamente buena parte de su energía. A este efecto se le llama "el corte de GZK" (por sus descubridores Greisen, Zatsepin, y Kuzmin) y lo que nos dice es que no debería de haber rayos cósmicos más allá de una cierta energía. Para que la interacción entre el fotón y el protón produzca piones, es necesario que los fotones de la radiación cósmica de fondo se vean como de 100 MeV por el protón. ¿A qué velocidad debe de moverse el protón para que esto ocurra? (Tome un fotón típico de un cuerpo negro a 2.7 K). ¿Qué energía tendría el protón para un observador en reposo? Esta sería la energía de "corte de GZK".

Sin embargo, si se han detectado protones por arriba del "corte de GZK" y nadie sabe a que se debe esto. Una posible explicación es que se produjeran cerca de la Tierra (la explicación del origen "local") y que por esto

alcanzaron a llegarnos, pero en general se cree que los rayos cósmicos ultra-energéticos se producen en objetos lejanos como radiogalaxias y cuasares y que de algún modo logran viajar grandes distancias.

4) Una esfera que absorbe y emite como cuerpo negro y que es conductora térmica viaja a velocidad β por el espacio. Si la temperatura de la radiación cósmica de fondo es T_{bg}, ¿a qué temperatura quedará la esfera?

Table 1: VALORES MEDIDOS

Día	$\theta_1('')$	$\theta_2('')$
0	0.14	0.07
7	0.24	0.13
13	0.36	0.18
20	0.45	0.25
27	0.59	0.31
34	0.72	0.37

Soluciones

1. a) En la Tabla y en la Figura se muestran los valores medidos para θ_1 y θ_2. Haciendo un ajuste de mínimos cuadrados obtenemos que $\omega_1 = 17$ mas día^{-1} y $\omega_2 = 9$ mas día^{-1}, A una distancia de 12.5 kpc, esto implica $v'_{1,\perp} = 3.7 \times 10^{10}\ cm\ s^{-1}$ y $v'_{2,\perp} = 2.0 \times 10^{10}\ cm\ s^{-1}$. La $v'_{1,\perp}$ da un valor mayor que el de la luz, 1.2 c, lo cual parece violar la teoría de la Relatividad.

b) Para la fuente que se acerca

$$\omega_1 = \frac{v\ t\ sen(\phi_1)}{R\ (t - \beta\ t\ cos(\phi_1))} = \frac{v\ sen(\phi_1)}{R\ (1 - \beta\ cos(\phi_1))},$$

$$v'_{1,\perp} = \frac{v\ t\ sen(\phi_1)}{(t - \beta\ t\ cos(\phi_1))} = \frac{v\ sen(\phi_1)}{(1 - \beta\ cos(\phi_1))},$$

mientras que para la que se acerca

$$\omega_2 = \frac{v\ t\ sen(\phi_1)}{R\ (t + \beta\ t\ cos(\phi_1))} = \frac{v\ sen(\phi_1)}{R\ (1 + \beta\ cos(\phi_1))},$$

$$v'_{2,\perp} = \frac{v\ t\ sen(\phi_1)}{(t + \beta\ t\ cos(\phi_1))} = \frac{v\ sen(\phi_1)}{(1 + \beta\ cos(\phi_1))},$$

c) Tomando de ahora en adelante $\phi = \phi_1$ tenemos que

$$\omega_1 = \frac{\beta\ c\ sen(\phi)}{R\ (1 - \beta\ cos(\phi))},$$

$$\omega_2 = \frac{\beta\ c\ sen(\phi)}{R\ (1 + \beta\ cos(\phi))},$$

donde conocemos ω_1. ω_2, y R. Entonces tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (β y ϕ).

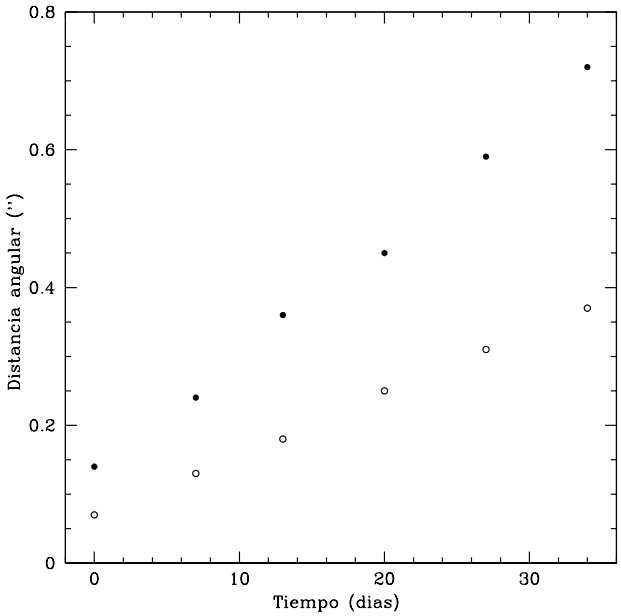

Figure 3: Movimientos propios de las nubes de la Figura 1. Los círculos llenos son para la fuente de la izquierda y los círculos vacíos son para la fuente de la derecha.

Este sistema se resuelve a

$$\phi = arctan\left(\frac{2\ R\ \omega_1\ \omega_2}{c\ (\omega_1 - \omega_2)}\right],$$

$$\beta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{cos(\phi)\ (\omega_1 + \omega_2)}.$$

Sustituyendo por los valores medidos, nos queda

$$\phi = 70°,$$

$$\beta = 0.90.$$

d) De la ecuación

$$v'_{1,\perp} = \frac{\beta\ c\ sen(\phi)}{(1 - \beta\ cos(\phi))},$$

vemos que el movimiento se verá superlumínico cuando

$$\frac{\beta\ sen(\phi)}{(1 - \beta\ cos(\phi))} \geq 1,$$

o sea, cuando

$$\beta \geq \frac{1}{sen(\phi) + cos(\phi)}.$$

Esta región se muestra en la Figura 4.

e) Tomamos la ecuación

$$v'_{\perp} = \frac{\beta\ c\ sen(\phi)}{(1 - \beta\ cos(\phi))},$$

y la derivamos respecto a ϕ para obtener

$$\frac{dv'_{\perp}}{d\phi} = \frac{c\beta(cos(\phi) - \beta)}{(1 - \beta\ cos(\phi))^2}.$$

Igualando a cero obtenemos la condición

$$\beta = cos(\phi),$$

obtenemos

$$v'_{\perp,max} = \frac{\beta c}{(1 - \beta^2)^{1/2}}.$$

f) Las longitudes de onda para las dos fuentes serían

$$\lambda_1 = \lambda_0(1 - \beta cos(\phi))\gamma,$$

$$\lambda_2 = \lambda_0(1 + \beta cos(\phi))\gamma.$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0\gamma,$$

de donde

$$\beta = \left(1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}\right)^{1/2}.$$

Con esta tercera ecuación y las dos ecuaciones para las ω tendríamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (β, ϕ, y R).

2. a) La ecuación de la intensidad es

$$\frac{dP_r}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta cos(\phi))}\frac{dP'}{d\Omega'},$$

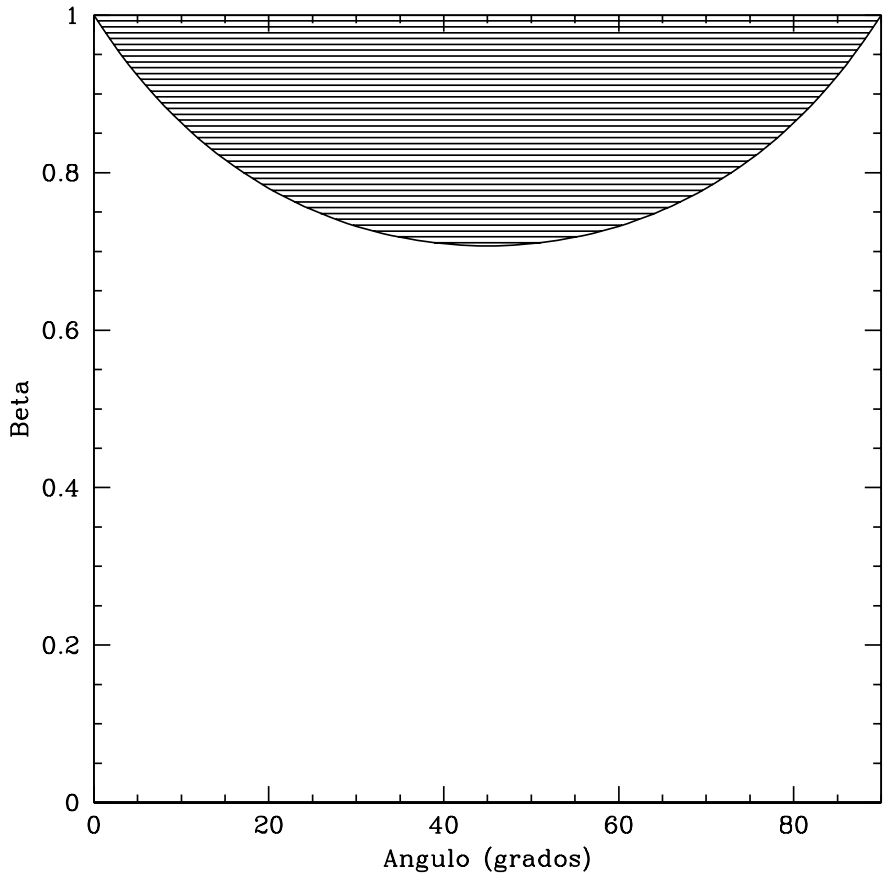

Figure 4: La zona donde los movimientos se ven superlumínicos que arriba de la curva.

de modo que los flujos relativos serán

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{1+\beta cos(\phi)}{1-\beta cos(\phi)}\right)^4.$$

b) Para los paramétros dados

$$\frac{S_1}{S_2} = 1.5 \times 10^9.$$

Este contraste es tan grande que es muy difícil detecta a la fuente que se aleja.

3) Para los fotones que se mueven en dirección del protón tenemos que la fórmula del efecto Doppler da

$$E = E_0\gamma(1+\beta),$$

donde E_0 es la energía original del fotón y E es la energía en el marco de referencia del protón. Tomando como valor típico de los fotones del fondo cósmico $E_0 \simeq 3 \times 10^{-4}$ eV, obtenemos que hace falta una $\gamma \simeq 3 \times 10^{11}$. Entonces en nuestro marco de referencia los protones tendrán una energía de γMc^2 eV, o sea de 2.8×10^{20} eV $= 4.4 \times 10^8$ ergs.

4) La temperatura que se "ve" en el marco de referencia de la esfera es:

$$T' = \frac{T_{bg}}{\gamma\ (1-\beta\ cos(\theta'))}.$$

Entonces la energía que recibe la esfera será

$$E' = \frac{2\pi T_{bg}^4 \sigma r^2}{\gamma^4} \int_{-1}^{1} \frac{d\mu'}{(1-\beta\mu')^4},$$

donde r es el radio de la esfera y

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\mu'}{(1-\beta\mu')^4} = \frac{2}{3}\left(\frac{3+\beta^2}{3(1-\beta)(1+\beta)}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3+\beta^2}{3(1-\beta^2)}\right).$$

Igualando la energía absorbida a la energía radiada:

$$E' = 4\pi r^2 \sigma T_{esf}^4,$$

nos queda que

$$T_{esf} = T_{bg}\left(\frac{3+\beta^2}{3(1-\beta^2)}\right)^{1/4} = T_{bg}(\gamma^2(1-(\beta^2/3)))^{1/4}.$$