

Problema Teórico No. 2

XIII Olimpiada Iberoamericana de Física, 2008, Morelia, Michoacán, México

¿Cuánta energía tienen y de qué tan lejos provienen los Rayos Cósmicos Ultraenergéticos?

Introducción:

El proyecto Auger es una colaboración internacional que busca entender a los rayos cósmicos ultraenergéticos, partículas que viajan por el espacio a velocidades muy cercanas a la de la luz. Estas partículas se detectan indirectamente, por los chubascos (lluvias) de otras partículas y de fotones que se producen al llegar a la parte alta de nuestra atmósfera y chocar con las moléculas del aire ahí existentes (ver Figura 2.1). Sus energías son de muchos órdenes de magnitud mayores que las de las partículas más energéticas creadas en los aceleradores terrestres y existe gran interés en comprender cómo se aceleran a estas velocidades tan cercanas a las de la luz y de qué cuerpos cósmicos provienen.

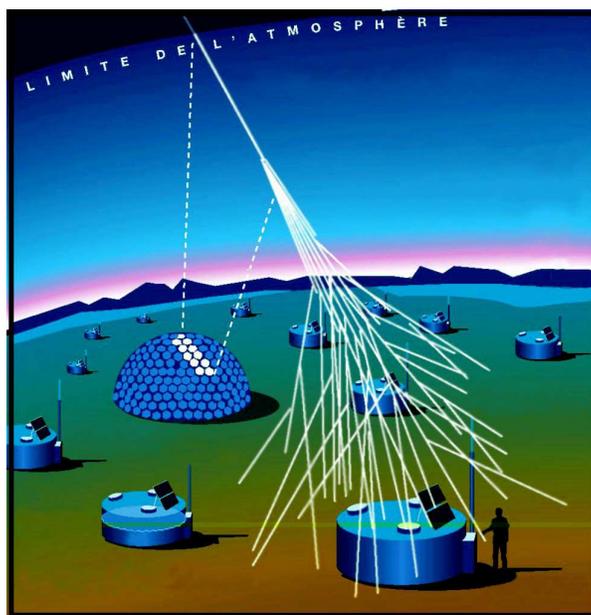


Fig. 2.1 Diagrama artístico del proyecto Auger, en construcción en Argentina.

Se sabe que los rayos cósmicos por encima de cierto umbral de energía NO pueden provenir de cuerpos cósmicos muy remotos. Esto se debe a que por encima de una cierta energía (conocida como el “corte” GZK por las iniciales de los físicos que predijeron este efecto en 1966), estos rayos cósmicos ultraenergéticos pueden chocar

con fotones de la radiación cósmica de fondo, perdiendo parte de su energía al crear nuevas partículas. En otras palabras, en estas colisiones dejan de ser ultraenergéticos.

En este problema calculamos cuál es el umbral de energía para que los rayos cósmicos puedan tener estas colisiones que los degradan a menores energías y la distancia que pueden recorrer como ultraenergéticos, antes de sufrir una de estas colisiones.

Problema:

Parte I: Características de los fotones de la radiación cósmica de fondo.

La radiación cósmica de fondo es una energía en forma de fotones que llena el espacio y se produjo cuando el Universo era muy joven. Su intensidad como función de la longitud de onda del fotón se ajusta a un cuerpo negro con temperatura T de 2.7 K. La radiación de cuerpo negro tiene la propiedad, descrita por la ley de desplazamiento de Wien, en la cual su máximo de emisión ocurre a una longitud de onda λ_{\max} inversamente proporcional a la temperatura:

$$\lambda_{\max} = \frac{0.0029}{T},$$

donde λ_{\max} está en metros y T en Kelvin.

(I.a) Suponga que los fotones de λ_{\max} son típicos de la radiación de cuerpo negro de fondo y calcule esta longitud de onda.

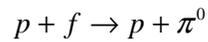
[0.3 puntos]

(I.b) Calcule la energía de un fotón típico de la radiación cósmica de fondo. La constante de Planck es $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s y la velocidad de la luz es $c = 3.0 \times 10^8$ m s⁻¹.

[0.7 puntos]

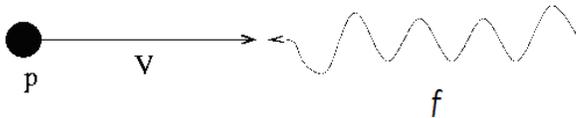
Parte II: Colisiones entre protones ultraenergéticos y fotones de la radiación cósmica de fondo.

Por simplicidad suponga que el proceso de pérdida de energía es debido a que un protón (p) colisiona de frente con uno de los fotones (f) de la radiación cósmica de fondo, resultando de esta colisión el protón más un pión neutro (π^0):

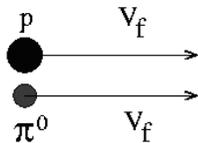


Las situaciones inicial y final se muestran en la siguiente figura:

SITUACION INICIAL:



SITUACION FINAL:



La velocidad inicial del protón es V y su momento es $\gamma m_p V$, donde

$\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$. Las masas de las partículas son:

$$m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_{\pi^0} = 2.4 \times 10^{-28} \text{ kg}$$

Suponga que el problema es en una sola dimensión y que el protón y el pión neutro se mueven con la misma velocidad V_f después de la colisión. Se trata de determinar cuál es la energía mínima que debe de tener el protón para lograr producir al pión neutro.

(II.a) Escriba las ecuaciones que rigen la colisión.

[2.0 puntos]

(II.b) Determine la energía inicial del protón ultraenergético, $\gamma m_p c^2$. Dado que

$V \approx c$, puede usar la aproximación $1 + \frac{V}{c} \approx 2$.

[3.0 puntos]

(II.c) Encuentre el valor de la energía inicial del protón ultraenergético en Joules y en electronVolts. Para esto necesita saber que $1 \text{ J} = 6.2 \times 10^{18} \text{ eV}$. Los protones a ésta y mayores energías son considerados ultraenergéticos porque pueden producir partículas al chocar con los fotones de la radiación cósmica de fondo.

[1.0 puntos]

Parte III: Camino libre medio para una colisión

(III.a) La densidad de energía (la energía en fotones por unidad de volumen) de la radiación cósmica de fondo está dada por:

$$u_E = aT^4$$

donde $a = 7.6 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$ es la constante de radiación. Calcule la densidad de energía de la radiación cósmica de fondo.

[0.3 puntos]

(III.b) Determine la densidad de fotones u_f (el número de fotones por unidad de volumen) de la radiación cósmica de fondo.

[1.0 puntos]

(III.c) La sección eficaz para estas colisiones entre protones y fotones es $\sigma = 2.0 \times 10^{-32} \text{ m}^2$. El camino libre medio está definido como la distancia promedio que recorre una partícula entre una colisión y la siguiente y puede estimarse como la altura de un cilindro que tiene como base la sección eficaz de colisión y que contiene a un fotón en su volumen. Los protones ultraenergéticos no pueden viajar distancias mucho más grandes que este camino libre medio sin perder energía y dejar de ser ultraenergéticos.

Estime el camino libre medio l , de un protón antes de sufrir una colisión con un fotón.

[1.2 puntos]

(III.d) Los cuásares son objetos cósmicos que tienen fenómenos de altas energías y que podrían ser responsables de la producción de los rayos cósmicos ultraenergéticos. Los cuásares son objetos lejanos, el más cercano está a una distancia de 2.0×10^{25} m. ¿Pueden los rayos cósmicos ultraenergéticos provenir de los cuásares o no? ¿Por qué?

[0.5 puntos]

J = Joule = Julio

K = grado Kelvin

¿Cuánta energía tienen y de qué tan lejos provienen los Rayos Cósmicos Ultraenergéticos?

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:
------------------------	-------------------	-------------------

Parte I: Características de los fotones de la radiación cósmica de fondo.

(I.a) La longitud de onda de un fotón típico de la radiación cósmica de fondo es:

RESPUESTA

VALOR CALIF.

$\lambda_{\max} = \frac{0.0029}{T} = 0.0011 \text{ m}$	0.3	
--	-----	--

(I.b) La energía de un fotón típico de la radiación cósmica de fondo es:

$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda_{\max}} = 1.8 \times 10^{-22} \text{ J}$	0.7	
---	-----	--

Parte II: Colisiones entre protones ultraenergéticos y fotones de la radiación cósmica de fondo.

(II.a) Las ecuaciones que rigen la colisión son:

$\gamma m_p V - h \frac{V}{c} = \gamma_f (m_p + m_{\pi^0}) V_f$ $\gamma m_p c^2 + h\nu = \gamma_f (m_p + m_{\pi^0}) c^2$	2.0	
--	-----	--

(II.b) La energía inicial del protón ultraenergético, $\gamma m_p c^2$, es

Primero se multiplica por c la ecuación de conservación de momento:

$$\gamma m_p V c - h\nu = \gamma_f (m_p + m_{\pi^0}) V_f c$$

y luego se eleva al cuadrado:

$$(\gamma m_p V c)^2 - 2\gamma m_p V c h\nu + (h\nu)^2 = [\gamma_f (m_p + m_{\pi^0}) V_f c]^2$$

Se eleva al cuadrado la ecuación de conservación de energía:

$$(\gamma m_p c^2)^2 + 2\gamma m_p c^2 h\nu + (h\nu)^2 = [\gamma_f (m_p + m_{\pi^0}) c^2]^2$$

A esta última ecuación se le resta la anterior, de modo que queda:

$$(\gamma m_p c^2)^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + 2\gamma m_p c^2 h\nu \left(1 + \frac{V}{c}\right) = [\gamma_f (m_p + m_{\pi^0}) c^2]^2 \left(1 - \frac{V_f^2}{c^2}\right)$$

Como

$$\gamma^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1$$

y

$$\gamma_f^2 \left(1 - \frac{V_f^2}{c^2}\right) = 1$$

y podemos tomar

$$\left(1 + \frac{V}{c}\right) \approx 2$$

Nos queda que:

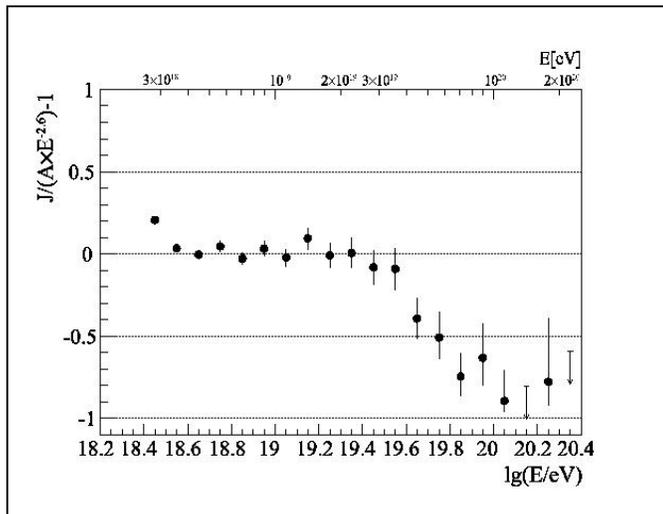
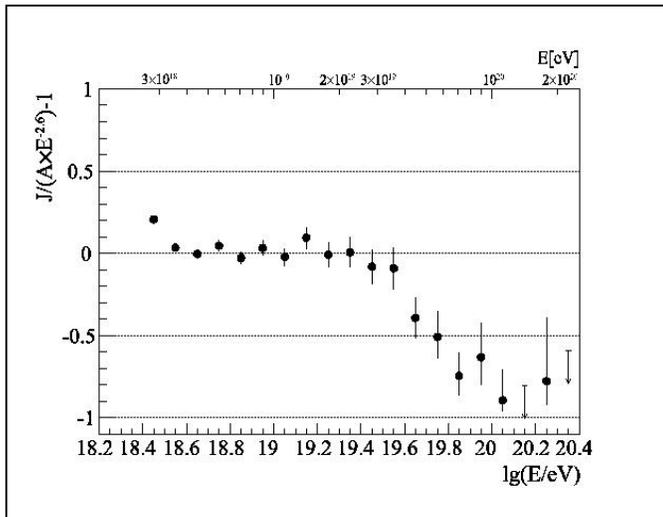
$$(m_p c^2)^2 + 4\gamma m_p c^2 h\nu = [(m_p + m_{\pi^0}) c^2]^2$$

$$\gamma m_p c^2 = \frac{c^4 [(m_p + m_{\pi^0})^2 - m_p^2]}{4h\nu}$$

de donde

$$\gamma m_p c^2 = 9.7 J = 6.0 \times 10^{19} \text{ eV}$$

Este “corte” en el espectro de energía de los rayos cósmicos ha sido observado primero por el proyecto HiRes y luego por Auger, como se muestra en la siguiente figura:



Espectro de energías de los rayos cósmicos mostrando el corte GZK. Datos del proyecto Auger.

Entonces, la fórmula de la energía inicial del protón ultraenergético, $\gamma m_p c^2$ es:

$\gamma m_p c^2 = \frac{c^4 \left[(m_p + m_{\pi^0})^2 - m_p^2 \right]}{4h\nu}$	3.0	
---	-----	--

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:
------------------------	-------------------	-------------------

(II.d) La energía inicial del protón ultraenergético en Joules y en electronVolts es:

$\gamma m_p c^2 = 9.8 J = 6.1 \times 10^{19} eV$	1.0	
--	-----	--

Parte III: Camino libre medio para una colisión

(III.a) La densidad de energía de la radiación cósmica de fondo es:

$u_E = aT^4 = 4.0 \times 10^{-14} J m^{-3}$	0.3	
---	-----	--

(III.b) Es importante darse cuenta de que la densidad de fotones será aproximadamente igual a la densidad de energía sobre la energía típica de un fotón. La densidad de fotones de la radiación cósmica de fondo es:

$u_f = \frac{u_E}{h\nu} = 2.2 \times 10^8 \text{ fotones } m^{-3}$	1.0	
--	-----	--

(III.c) El camino libre medio para una colisión es:

$l = \frac{1}{u_f \sigma} = 2.3 \times 10^{23} m$	1.2	
---	-----	--

(III.d) Comparación entre el camino libre medio y la distancia a los cuerpos lejanos en el Universo:

Como el camino libre medio para una colisión es mucho más corto que la distancia a los cuásares más cercanos, los rayos cósmicos ultraenergéticos tienen que provenir de objetos distintos, relativamente cercanos.	0.5	
---	-----	--